

Probabilitat i estadística per a les PAU

0.1 Continguts essencials

Bloc	Què cal dominar
Probabilitat bàsica	Successos, unions, interseccions, complementari, llei de Laplace, diagrames d'arbre, taules de contingència.
Probabilitat condicionada	$P(A B)$, canvi de condició, interpretació de frases del tipus “sabent que”, “entre els que”, “si ha passat”.
Independència	Diferenciar incompatibilitat i independència; usar $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ només quan sigui justificat.
Probabilitat total i Bayes	Particions, arbres, falsos positius, proves mèdiques, classificacions, procedències.
Variables discretes	Distribució binomial, esperança i desviació típica.
Variables contínues	Distribució normal, tipificació, simetria i ús de taules/calculadora.
Aproximació normal	Quan i com aproximar una binomial per una normal; correcció de continuïtat.
Estadística descriptiva	Mitjana, variància, desviació típica, proporcions, interpretació de dades.
Inferència	Mostres, estimadors, intervals de confiança per a mitjana i proporció, marge d'error, mida mostral.

Alerta PAU

En un examen PAU no n'hi ha prou amb posar una fórmula i un resultat. Cal **definir els successos o la variable aleatòria**, justificar el model i interpretar el resultat en el context. Les orientacions i criteris oficials remarquen que una resposta correcta sense explicació pot perdre molta puntuació.

1 Llenguatge de successos

1.1 Experiments aleatoris i espai mostral

Un **experiment aleatori** és un procés del qual no podem predir amb certesa el resultat, tot i conèixer-ne els possibles resultats.

- **Espai mostral:** conjunt de tots els resultats possibles. Es denota per Ω .
- **Succés:** subconjunt de Ω .
- **Succés segur:** Ω .
- **Succés impossible:** $\emptyset$.
- **Succés complementari:** A^c , és a dir, que no passi A .

1.2 Operacions amb successos

Operació	Notació	Interpretació
Unió	$A \cup B$	Passa A o passa B o passen tots dos.
Intersecció	$A \cap B$	Passen A i B alhora.
Complementari	A^c	No passa A .
Diferència	$A \setminus B = A \cap B^c$	Passa A però no passa B .

Alerta PAU

La paraula **o** en matemàtiques acostuma a ser inclusiva: $A \cup B$ vol dir que pot passar un, l'altre o tots dos. Si l'enunciat diu "exactament un", aleshores cal fer:

$$(A \cap B^c) \cup (A^c \cap B).$$

1.3 Successos incompatibles

Dos successos són **incompatibles** si no poden passar alhora:

$$A \cap B = \emptyset.$$

Aleshores:

$$P(A \cap B) = 0.$$

Alerta PAU

Incompatibles no vol dir independents. De fet, si $P(A) > 0$ i $P(B) > 0$, dos successos incompatibles no poden ser independents, perquè:

$$P(A \cap B) = 0 \neq P(A)P(B).$$

2 Regles bàsiques de probabilitat

2.1 Propietats fonamentals

Per a qualsevol succés A :

$$0 \leq P(A) \leq 1.$$

$$P(\Omega) = 1, \quad P(\emptyset) = 0.$$

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

Per a dos successos A i B :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

Si A i B són incompatibles:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

2.2 Regla de Laplace

Si tots els resultats elementals són equiprobables:

$$P(A) = \frac{\text{nombre de casos favorables}}{\text{nombre de casos possibles}}.$$

Alerta PAU

La regla de Laplace només es pot aplicar quan els casos són **equiprobables**. No és correcte fer “casos favorables / casos totals” si els resultats no tenen la mateixa probabilitat.

2.3 Probabilitat del complementari

Quan un succés és del tipus “com a mínim un”, sovint és més fàcil calcular el contrari.

$$P(\text{com a mínim un}) = 1 - P(\text{cap}).$$

Exemples habituals:

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0).$$

$$P(\text{almenys un defectuós}) = 1 - P(\text{cap defectuós}).$$

Nota important

A les PAU apareix molt sovint l'estratègia del complementari en problemes de paquets, proves, extraccions o repeticions independents.

3 Probabilitat condicionada

3.1 Definició

La probabilitat de A sabent que ha passat B és:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \quad P(B) > 0.$$

També es pot escriure:

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B).$$

I també:

$$P(A \cap B) = P(B|A)P(A).$$

Idea clau

La barra vertical $|$ es llegeix “sabent que”. El que hi ha després de la barra és la informació que ja sabem i, per tant, redueix l'univers de referència.

3.2 Com traduir l'enunciat

Fraser de l'enunciat	Traducció matemàtica
Probabilitat que passi A sabent que ha passat B	$P(A B)$
Entre els que tenen B , quina proporció tenen A ?	$P(A B)$
Si sabem que ha estat detectat, probabilitat que sigui del tipus A	$P(A D)$
Probabilitat que sigui A i B	$P(A \cap B)$
Probabilitat que sigui A o B	$P(A \cup B)$
Probabilitat que sigui A però no B	$P(A \cap B^c)$

Alerta PAU

No confonguis $P(A|B)$ amb $P(B|A)$. Normalment són diferents. En problemes de Bayes, aquesta és la trampa principal.

3.3 Condicionada en taules de contingència

Si tenim una taula de doble entrada amb totals, la probabilitat condicionada es calcula restringint el denominador a la fila o columna de la condició.

$$P(A|B) = \frac{\text{casos que compleixen } A \text{ i } B}{\text{casos que compleixen } B}.$$

Mètode

Per resoldre una taula de contingència:

1. Defineix files i columnes.
2. Omple totals marginals.
3. Identifica què és condició i què és resultat.
4. Usa el denominador adequat: el total de la condició.

4 Independència

4.1 Definició

Dos successos A i B són independents si el fet que passi un no modifica la probabilitat de l'altre.

Equivalentment:

$$P(A|B) = P(A), \quad P(B) > 0.$$

També:

$$P(B|A) = P(B), \quad P(A) > 0.$$

I, sobretot:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

4.2 Quan es pot multiplicar?

Es pot multiplicar directament quan:

- l'enunciat diu explícitament que els successos són independents;
- es tracta de repeticions independents d'un mateix experiment;
- el context ho garanteix, per exemple llançaments independents d'una moneda o dau.

Si no hi ha independència, cal usar:

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A).$$

Alerta PAU

Molts errors de PAU venen de multiplicar probabilitats sense justificar independència. Si hi ha extraccions **sense reposició**, en general els successos no són independents.

5 Diagrames d'arbre

5.1 Quan convé fer un arbre?

Un arbre és útil quan hi ha processos en etapes:

- primer es tria una urna, fàbrica, institut, grup, prova o origen;
- després passa un segon succés condicionat al primer;
- es demana una probabilitat total o una probabilitat inversa.

5.2 Regles dels arbres

- Per calcular la probabilitat d'una **branca completa**, es multipliquen les probabilitats del camí.
- Per calcular la probabilitat d'un succés que pot passar per diverses branques, se sumen les probabilitats de les branques corresponents.

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ són els primers camins i B és el succés final:

$$P(B) = P(A_1)P(B|A_1) + P(A_2)P(B|A_2) + \dots + P(A_n)P(B|A_n).$$

Mètode

En un problema d'arbre:

1. Escribe els successos.
2. Dibuixa les branques inicials amb probabilitats que sumin 1.
3. A cada branca, posa les probabilitats condicionades corresponents.
4. Multiplica per obtenir interseccions.
5. Suma les branques que responen a la pregunta.

6 Teorema de la probabilitat total i Bayes

6.1 Partició de l'espai mostral

Els successos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formen una partició de Ω si:

- són incompatibles dos a dos;
- la seva unió és tot l'espai mostral;
- $P(A_i) > 0$ per a tot i .

6.2 Probabilitat total

Si $A_1, A_2, \dots, A_n$ formen una partició, aleshores:

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(A_i)P(B|A_i).$$

Per a dos casos:

$$P(B) = P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c).$$

6.3 Teorema de Bayes

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_{j=1}^n P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Per a dos casos:

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(A)P(B|A) + P(A^c)P(B|A^c)}.$$

Idea clau

Bayes serveix per invertir la condició. Normalment l'enunciat dona $P(B|A)$ i demana $P(A|B)$.

Alerta PAU

En proves mèdiques, tests, detectors i classificadors, una sensibilitat alta no implica necessàriament una probabilitat alta d'estar malalt si el test és positiu. Cal tenir en compte la prevalença.

6.4 Esquema de resolució de Bayes

Mètode

1. Defineix el succés d'origen: A , A^c o $A_1, A_2, \dots$
2. Defineix el succés observat: B .
3. Escribeix les dades: $P(A_i)$ i $P(B|A_i)$.
4. Calcula $P(B)$ amb probabilitat total.
5. Aplica Bayes: $P(A_i|B)$.
6. Interpreta el resultat amb una frase contextualitzada.

7 Combinatòria bàsica

La combinatòria no sempre apareix explícitament, però és necessària per calcular probabilitats en casos equiprobables.

7.1 Factorial

$$n! = n(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1, \quad 0! = 1.$$

7.2 Variacions, permutacions i combinacions

Tipus	Fórmula	Quan s'usa
Permutacions	$P_n = n!$	Ordenar n elements diferents.
Variacions sense repetició	$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$	Triar k elements ordenats sense repetir.
Variacions amb repetició	$VR_{n,k} = n^k$	Triar k elements ordenats amb repetició.
Combinacions	$C_{n,k} = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$	Triar k elements sense importar l'ordre.

Alerta PAU

Pregunta't sempre: **importa l'ordre?** Si importa, variacions/permutacions. Si no importa, combinacions.

8 Variables aleatòries

8.1 Variable aleatòria discreta

Una variable aleatòria discreta pren valors aïllats, per exemple:

X = nombre de components defectuosos en un paquet.

La distribució queda determinada per les probabilitats:

$$P(X = x_i) = p_i.$$

Cal complir:

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1.$$

8.2 Esperança, variància i desviació típica

$$E(X) = \sum_i x_i p_i.$$

$$Var(X) = E(X^2) - [E(X)]^2.$$

$$\sigma = \sqrt{Var(X)}.$$

Idea clau

L'esperança és la mitjana teòrica a llarg termini. No cal que sigui un valor possible de la variable.

9 Distribució binomial

9.1 Quan una variable és binomial?

Una variable X segueix una distribució binomial si compta el nombre d'èxits en n repeticions independents d'un experiment amb dues possibilitats: èxit o fracàs.

Escrivim:

$$X \sim \text{Bin}(n, p),$$

on:

- n és el nombre de repeticions;
- p és la probabilitat d'èxit en cada repetició;
- $1 - p$ és la probabilitat de fracàs.

9.2 Condicions per aplicar la binomial

1. Nombre fix de proves: n .
2. Cada prova té dos resultats: èxit/fracàs.
3. La probabilitat d'èxit p és constant.
4. Les proves són independents.
5. La variable compta el nombre d'èxits.

Alerta PAU

Si les extraccions són sense reposició i la població és petita, la probabilitat d'èxit canvia i no és binomial. Si la població és molt gran respecte de la mostra, pot ser acceptable aproximar-la com a binomial, però cal justificar-ho.

9.3 Funció de probabilitat

Si $X \sim \text{Bin}(n, p)$:

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

9.4 Esperança i desviació típica

$$E(X) = np.$$

$$\text{Var}(X) = np(1-p).$$

$$\sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

9.5 Expressions habituals

Frase	Traducció
Exactament k èxits	$P(X = k)$
Com a màxim k èxits	$P(X \leq k)$
Menys de k èxits	$P(X < k) = P(X \leq k - 1)$
Com a mínim k èxits	$P(X \geq k)$
Més de k èxits	$P(X > k) = P(X \geq k + 1)$
Cap èxit	$P(X = 0)$
Almenys un èxit	$P(X \geq 1) = 1 - P(X = 0)$

Mètode

En un problema de binomial:

1. Defineix clarament X .
2. Escriu $X \sim \text{Bin}(n, p)$.
3. Tradueix la pregunta a una desigualtat o igualtat amb X .
4. Calcula amb fórmula, taula o calculadora.
5. Interpreta el resultat.

10 Distribució normal

10.1 Definició

Una variable contínua X segueix una distribució normal de mitjana μ i desviació típica σ si:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$

La normal és simètrica respecte de μ i té forma de campana.

Nota important

En molts llibres s'escriu $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$ i en altres $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. A les PAU catalanes és molt habitual que l'enunciat indiqui explícitament la mitjana i la desviació típica. Cal llegir amb atenció.

10.2 Normal estàndard

La normal estàndard és:

$$Z \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Té mitjana 0 i desviació típica 1.

10.3 Tipificació

Si:

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma),$$

aleshores:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

Per tant:

$$P(X \leq a) = P\left(Z \leq \frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

10.4 Ús de la simetria

Si $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$:

$$P(Z \leq -a) = P(Z \geq a) = 1 - P(Z \leq a).$$

També:

$$P(-a \leq Z \leq a) = 2P(Z \leq a) - 1.$$

10.5 Intervals centrals habituals

Nivell central	Valor crític aproximat	Expressió
90%	1.645	$P(-1.645 \leq Z \leq 1.645) = 0.90$
95%	1.96	$P(-1.96 \leq Z \leq 1.96) = 0.95$
99%	2.576	$P(-2.576 \leq Z \leq 2.576) = 0.99$

Alerta PAU

No és el mateix $P(X \leq a)$ que $P(X \geq a)$. Si la calculadora dona acumulada per l'esquerra, per una cua dreta cal fer $1 - P(X \leq a)$.

10.6 Probabilitats en intervals

$$P(a \leq X \leq b) = P\left(\frac{a - \mu}{\sigma} \leq Z \leq \frac{b - \mu}{\sigma}\right).$$

I, amb funció de distribució Φ :

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

11 Aproximació de la binomial per la normal

11.1 Quan es pot aproximar?

Si:

$$X \sim \text{Bin}(n, p),$$

per a n gran es pot aproximar per una normal:

$$X \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Condicions pràctiques habituals:

$$np \geq 5 \quad \text{i} \quad n(1-p) \geq 5.$$

Alguns criteris més exigents demanen ≥ 10 .

11.2 Correcció de continuïtat

La binomial és discreta i la normal és contínua. Per això, quan s'aproxima, convé aplicar correcció de continuïtat.

Probabilitat binomial	Aproximació amb normal
$P(X = k)$	$P(k - 0.5 < X < k + 0.5)$
$P(X \leq k)$	$P(X < k + 0.5)$
$P(X < k)$	$P(X < k - 0.5)$
$P(X \geq k)$	$P(X > k - 0.5)$
$P(X > k)$	$P(X > k + 0.5)$
$P(a \leq X \leq b)$	$P(a - 0.5 < X < b + 0.5)$

Alerta PAU

La correcció de continuïtat és una de les fonts d'errors més típiques. Si demanen "almenys 110", és $X \geq 110$ i s'aproxima per $X > 109.5$, no per $X > 110$.

12 Estadística descriptiva

12.1 Població, mostra i variable

- **Població:** conjunt total d'individus que volem estudiar.

- **Mostra:** subconjunt observat de la població.
- **Variable:** característica que mesurem.
- **Paràmetre:** valor real desconegut de la població, per exemple μ o p .
- **Estadístic:** valor calculat amb la mostra, per exemple $\bar{x}$ o $\hat{p}$.

12.2 Mitjana mostral

Si tenim dades $x_1, x_2, \dots, x_n$:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}.$$

12.3 Proporció mostral

Si en una mostra de mida n hi ha x individus amb una característica:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$

12.4 Variància i desviació típica

Variància poblacional de les dades:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Desviació típica:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2}.$$

Variància mostral corregida:

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Nota important

En inferència, si l'enunciat dona la desviació típica poblacional σ , s'usa aquesta. Si només tenim dades d'una mostra i cal estimar la desviació típica, pot aparèixer s . A nivell PAU sovint l'enunciat dona la desviació típica o indica com procedir.

13 Inferència estadística

13.1 Què és inferir?

Inferir vol dir extreure conclusions sobre una població a partir d'una mostra.

Idea clau

Probabilitat: coneixem el model i calculem probabilitats.

Estadística: tenim dades i estimem el model o els seus paràmetres.

13.2 Estimació puntual

Paràmetre poblacional	Estimador	Interpretació
Mitjana μ	$\bar{x}$	Mitjana de la mostra.
Proporció p	$\hat{p} = x/n$	Percentatge mostral en forma decimal.
Desviació típica σ	s	Desviació típica mostral.

Alerta PAU

Si demanen una proporció i després un percentatge, no confonguis 0.378 amb 37.8%. Són el mateix valor expressat en unitats diferents.

14 Intervals de confiança

14.1 Estructura general

Un interval de confiança té la forma:

estimació puntual $\pm$ marge d'error.

$$IC = (\text{estimador} - E, \text{estimador} + E).$$

14.2 Interval de confiança per a una mitjana amb σ coneguda

Si la població és normal o la mostra és gran, i coneixem la desviació típica poblacional σ :

$$IC_{\gamma}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

On:

$$\gamma = 1 - \alpha.$$

Confiança	α	$z_{\alpha/2}$
90%	0.10	1.645
95%	0.05	1.96
99%	0.01	2.576

14.3 Marge d'error per a una mitjana

$$E = z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Per tant, si volem que el marge d'error sigui com a màxim E :

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2.$$

Alerta PAU

La mida mostral sempre s'arrodoneix **cap amunt**, perquè necessitem una mostra prou gran.

14.4 Interval de confiança per a una proporció

Si $\hat{p} = x/n$, l'interval de confiança per a la proporció poblacional p és:

$$IC_{\gamma}(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right).$$

El marge d'error és:

$$E = z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

14.5 Mida mostral per estimar una proporció

Si tenim una estimació prèvia $\hat{p}$:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{E^2}.$$

Si no tenim cap estimació prèvia, es pren el cas més desfavorable:

$$\hat{p} = 0.5.$$

Així:

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \cdot 0.25}{E^2}.$$

Alerta PAU

El cas $\hat{p} = 0.5$ dona el marge d'error màxim perquè $p(1-p)$ és màxim quan $p = 0.5$.

14.6 Interpretació correcta d'un interval de confiança

Una interpretació correcta és:

Amb un nivell de confiança del 95%, estimem que el paràmetre poblacional es troba entre els dos extrems de l'interval.

Alerta PAU

No és rigorós dir: “hi ha un 95% de probabilitat que μ estigui en aquest interval” si μ és un paràmetre fix. El que és aleatori és l'interval abans de prendre la mostra. A nivell PAU, convé dir “amb una confiança del 95% estimem que...”.

15 Contrast entre probabilitat i estadística

Problema de probabilitat	Problema d'estadística/inferència
Coneixem p , μ , σ o la distribució.	No coneixem el paràmetre poblacional.
Cal calcular una probabilitat.	Cal estimar un valor o construir un interval.
Exemple: $X \sim \text{Bin}(10, 0.01)$, calcula $P(X \geq 2)$.	Exemple: en una mostra de 500 persones, 189 tenen una característica; estima p .
Resposta: una probabilitat.	Resposta: una estimació o interval.

Alerta PAU

A les PAU és habitual que l'enunciat barregi context i dades. Abans de calcular, decideix: **estic calculant una probabilitat amb un model donat o estic estimant un paràmetre a partir d'una mostra?**

16 Casos típics de PAU i com atacar-los

16.1 Cas 1: antivirus, tests i detectors

Aquest tipus de problema sol combinar:

- unions: “detectat per A o per B”;
- independència: “actuen de forma independent”;
- condicionada: “si ha estat detectat, probabilitat que...”.

Mètode

1. Defineix A = “detectat pel primer” i B = “detectat pel segon”.
2. Si són independents, calcula $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.
3. Per “detectat”, calcula $P(A \cup B)$.
4. Per “detectat per A i no per B”, calcula $P(A \cap B^c)$.
5. Per “si ha estat detectat”, el denominador és $P(A \cup B)$.

16.2 Cas 2: procedència i característica

Exemple: instituts, fàbriques, màquines, urnes, lots.

Mètode

1. Defineix A_i = procedència.
2. Defineix B = característica observada.
3. Calcula $P(B)$ amb probabilitat total.
4. Si demanen procedència sabent característica, usa Bayes: $P(A_i|B)$.

16.3 Cas 3: nombre d'èxits en n proves

Si hi ha repeticions independents i es compta el nombre de vegades que passa una cosa, probablement és binomial.

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

Alerta PAU

Si primer calcules una probabilitat q i després repeteixes un experiment de paquets, persones o lots, pot aparèixer una **segona binomial**. Per exemple: probabilitat que un paquet sigui retornat q ; si compro 3 paquets, $Y \sim \text{Bin}(3, q)$.

16.4 Cas 4: mostra i percentatge

Si l'enunciat diu “prenem una mostra de n persones i x compleixen una característica”, normalment:

$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$

I l'interval és:

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

16.5 Cas 5: mitjana d'una mostra

Si l'enunciat dona dades numèriques i una desviació típica poblacional:

$$IC(\mu) = \bar{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

Alerta PAU

No confonguis la desviació típica de les dades amb l'error estàndard de la mitjana. L'error estàndard és $\sigma/\sqrt{n}$.

17 Taula de decisió ràpida

Què diu l'enunciat?	Model/fórmula	Perill habitual
“Sabent que...”	$P(A B)$	Invertir la condició.
“O”	$P(A \cup B)$	Oblidar restar la intersecció.
“I”	$P(A \cap B)$	Multiplicar sense independència.
“Com a mínim un”	$1 - P(\text{cap})$	Fer una suma llarga innecessària.
“Exactament k èxits”	Binomial $P(X = k)$	Oblidar el coeficient combinatori.
“Com a màxim k ”	$P(X \leq k)$	Confondre $<$ amb $\leq$.

“Almenys k ”	$P(X \geq k)$	Error de límit.
“Normal amb mitjana i desviació típica”	Tipificar	Posar variància en lloc de desviació típica.
“Aproxima la binomial”	Normal amb correcció de continuïtat	No usar ± 0.5 .
“Mostra de n , x casos”	$\hat{p} = x/n$	Donar percentatge sense interval si el demanen.
“Interval de confiança per a la mitjana”	$\bar{x} \pm z\sigma/\sqrt{n}$	Usar σ en lloc de $\sigma/\sqrt{n}$.
“Marge d’error màxim”	Aïllar n	No arrodonir cap amunt.

18 Redacció model per a PAU

18.1 Probabilitat condicionada

Definim els successos $A = \dots$ i $B = \dots$. Ens demanen $P(A|B)$, ja que l’enunciat diu que sabem que ha passat B . Per definició,

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Substituint les dades obtenim Per tant, la probabilitat demanada és

18.2 Bayes

Els successos $A_1, A_2, \dots, A_n$ formen una partició de l’espai mostral. El succés observat és B . Primer calculem $P(B)$ mitjançant la fórmula de la probabilitat total:

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

Ara apliquem Bayes:

$$P(A_j|B) = \frac{P(A_j)P(B|A_j)}{P(B)}.$$

Així, la probabilitat que l’origen sigui A_j sabent que ha passat B és

18.3 Binomial

Sigui X la variable aleatòria que compta el nombre de ... en n repeticions. Com que les repeticions són independents, només hi ha èxit o fracàs i la probabilitat d’èxit és constant p , tenim

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

La probabilitat demanada és $P(X \dots)$ i es calcula com

18.4 Interval de confiança

La proporció mostral és

$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$

Per a un nivell de confiança del $\gamma\%$, el valor crític és $z_{\alpha/2} = \dots$. L'interval de confiança és

$$\hat{p} \pm z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}.$$

Per tant, amb una confiança del $\gamma\%$, estimem que la proporció poblacional es troba entre $\dots$ i $\dots$.

19 Errors típics que cal evitar

1. **No definir successos o variables.** A PAU cal escriure què representa A , B o X .
2. **Confondre condicionades:** $P(A|B)$ no és $P(B|A)$.
3. **Multiplicar sense independència.**
4. **Confondre independència amb incompatibilitat.**
5. **Oblidar la intersecció en una unió:** $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
6. **No usar el complementari** quan simplifica molt el problema.
7. **Aplicar Laplace sense equiprobabilitat.**
8. **No justificar la binomial:** cal indicar n , p i per què és binomial.
9. **No fer correcció de continuïtat** en aproximacions normals de binomials.
10. **Confondre desviació típica i variància.** Si et donen $\sigma = 3$, no facis servir 9 com a desviació típica.
11. **Confondre desviació típica i error estàndard:** per a mitjanes, l'error estàndard és $\sigma/\sqrt{n}$.
12. **Interpretar malament un interval de confiança.** Cal parlar de confiança, no d'una probabilitat directa sobre un paràmetre fix.
13. **No arrodonir cap amunt la mida mostral.** Si surt 384.2, calen 385 individus.
14. **Barrejar percentatges i proporcions.** $37.8\% = 0.378$.

20 Formulari final

Probabilitat

$$P(A^c) = 1 - P(A).$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B).$$

$$A, B \text{ independents} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B).$$

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i).$$

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_j P(A_j)P(B|A_j)}.$$

Binomial

$$X \sim \text{Bin}(n, p).$$

$$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

$$E(X) = np, \quad \text{Var}(X) = np(1-p), \quad \sigma = \sqrt{np(1-p)}.$$

Normal

$$X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma), \quad Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \sim \mathcal{N}(0, 1).$$

$$P(a \leq X \leq b) = \Phi\left(\frac{b - \mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a - \mu}{\sigma}\right).$$

Aproximació normal de la binomial

$$X \sim \text{Bin}(n, p) \approx \mathcal{N}(np, \sqrt{np(1-p)}).$$

Inferència

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

$$\hat{p} = \frac{x}{n}.$$

$$IC_{\gamma}(\mu) = \left(\bar{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right).$$

$$IC_{\gamma}(p) = \left(\hat{p} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right).$$

$$n \geq \left(\frac{z_{\alpha/2} \sigma}{E} \right)^2.$$

$$n \geq \frac{z_{\alpha/2}^2 \hat{p}(1-\hat{p})}{E^2}.$$