

Resum: Límits, Continuitat i Teorema de Bolzano

1. Límits: nocions bàsiques

El límit d'una funció $f(x)$ quan x tendeix a un valor a és el valor que s'aproxima $f(x)$ quan x s'acosta a a . Es denota:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$$

També es poden estudiar:

- **Límits laterals:** $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$ i $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$
- **Límits a l'infinit:** $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ o $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$

Important: Perquè el límit $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ existeixi, els límits laterals han de coincidir.

2. Definició de continuïtat

Diem que $f(x)$ és **contínua** en un punt x_0 si:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

Aquesta definició implica tres condicions:

1. Existeix la imatge $f(x_0)$
2. Existeix el límit $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$
3. Els dos valors coincideixen

3. Criteris de continuïtat per tipus de funció

- **Polinòmiques:** contínues a $\mathbb{R}$
- **Racionals:** contínues a $\mathbb{R}$ excepte on el denominador s'anul·la
- **Exponencials:** $f(x) = a^x$ contínues a $\mathbb{R}$
- **Logarítmiques:** $f(x) = \log_a(x)$ contínues a $(0, +\infty)$
- **Definides a trossos:** cal estudiar continuïtat als punts de separació

4. Exemple introductori

Sigui:

$$f(x) = \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 6}$$

Estudia:

- **a) Domini:** excloure els valors que anul·len el denominador: $x^2 + x - 6 = 0 \Rightarrow x = 2, x = -3$
- **b) Continuitat:** f és contínua al seu domini
- **c) Límits a l'infinit:**

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2 - 8}{x^2 + x - 6} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 - \frac{8}{x^2}}{1 + \frac{1}{x} - \frac{6}{x^2}} = \frac{2}{1} = 2$$

- **d) Gràfica:**
- **e) Recorregut:** determinar y possibles segons el comportament

5. Teorema de Bolzano

El teorema de Bolzano diu:

Si $f(x)$ és contínua a $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$

Aleshores existeix $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$

S'utilitza per demostrar que una equació té arrels dins d'un interval i per fer una **aproximació per intervals** dels zeros de funcions contínues.

Exemple (PAU 2015):

Demostra que la funció $f(x) = e^x - x - 2$ té alguna arrel a l'interval $[0, 2]$:

- $f(0) = 1 - 0 - 2 = -1$
- $f(2) = e^2 - 2 - 2 \approx 7.39 - 4 = 3.39$
- $\Rightarrow f(0) \cdot f(2) < 0 \Rightarrow$ hi ha un zero a $[0, 2]$