

Resum: Concepte d'integral i càlcul de primitives

1. Concepte d'integral

Volem calcular l'àrea sota la gràfica de $f(x)$ entre $x = a$ i $x = b$. Dividim l'interval en subintervalls i aproximem amb sumes de rectangles:

$$S_n = \sum_{i=1}^n (x_i - x_{i-1}) \cdot m_i$$

El valor exacte és el límit d'aquestes sumes:

$$\int_a^b f(x) dx$$

2. Propietats de la integral definida

- $\int_a^a f(x) dx = 0$
- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$

3. Teorema fonamental del càlcul (Regla de Barrow)

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

on $F(x)$ és una primitiva de $f(x)$, és a dir, $F'(x) = f(x)$.

4. Integral indefinida

L'integral indefinida és el conjunt de primitives de $f(x)$:

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

Propietats:

- $\int k \cdot f(x) dx = k \cdot \int f(x) dx$
- $\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$

5. Primitives quasi immediates

Si $f(x) = g'(u(x)) \cdot u'(x)$, llavors:

$$\int g'(u(x)) \cdot u'(x) dx = g(u(x)) + C$$

Exemples:

- $\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$
- $\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$

6. Integració per parts

$$\int u(x) v'(x) dx = u(x) v(x) - \int u'(x) v(x) dx$$

7. Càlcul d'àrees

Respecte l'eix OX:

$$S = \int_a^b |f(x)| dx$$

Entre dues funcions:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

8. Canvi de variable (substitució)

Es fa un canvi $x = g(t)$ i es transforma la integral:

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) \cdot g'(t) dt$$

9. Integració de funcions racionals

- Si $\deg P \geq \deg Q$, cal fer divisió.
- Si $\deg P < \deg Q$, es poden separar en fraccions simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A}{x-a} + \frac{B}{x-b} + \dots$$