

Resum complet de Geometria per a les PAU

Matemàtiques II – Catalunya

Dossier de teoria, mètodes i observacions d'examen

1 Què entra oficialment a les PAU?

Segons l'estructura i els criteris publicats per Canal Universitats per a la matèria de Matemàtiques, el bloc d'Àlgebra/Geometria inclou, pel que fa a geometria:

- equacions de rectes i plans de l'espai;
- posició relativa entre varietats lineals;
- distàncies entre punts i entre varietats lineals;
- angles entre varietats lineals;
- perpendicularitat.

Això vol dir que la geometria de PAU no és només “saber fórmules”, sinó saber **traduir** entre formes vectorials, paramètriques i cartesianes, decidir posicions relatives i justificar els resultats amb rangs, productes escalars, vectorials o mixtos.

Atenció PAU

A l'examen es pot perdre fins a una part de la puntuació per manca de redacció, notació incorrecta, incoherència o falta de claredat. Per tant, en geometria cal escriure sempre què s'està calculant: vector director, vector normal, punt de la recta, rang, determinant, producte mixt, etc.

2 Punts i vectors a l'espai

2.1 Punts, vectors i vector entre dos punts

Un punt de l'espai s'escriu

$$P = (p_1, p_2, p_3), \quad Q = (q_1, q_2, q_3).$$

El vector que va de P a Q és

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (q_1 - p_1, q_2 - p_2, q_3 - p_3).$$

El vector posició d'un punt P és

$$\overrightarrow{OP} = (p_1, p_2, p_3).$$

Nota important

No confonguis mai punt i vector. Un punt és una posició; un vector és un desplaçament. Ara bé, en coordenades s'escriuen de manera semblant, i per això en PAU és molt freqüent l'error de restar en l'ordre incorrecte.

2.2 Mòdul d'un vector i distància entre punts

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, aleshores

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}.$$

La distància entre dos punts és el mòdul del vector que els uneix:

$$d(P, Q) = \|\vec{PQ}\| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

2.3 Vectors linealment dependents i independents

Dos vectors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són linealment dependents si un és múltiple de l'altre:

$$\vec{u} = \lambda \vec{v}.$$

Geomètricament, això vol dir que són paral·lels.

Tres vectors $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ són linealment dependents si el determinant format per les seves coordenades és zero:

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = \det \begin{pmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Geomètricament, això vol dir que els tres vectors són coplanaris.

Idea clau

En geometria de l'espai, moltes decisions es redueixen a aquestes dues preguntes:

- Dos vectors són proporcionals? $\Rightarrow$ paral·lelisme.
- Tres vectors tenen producte mixt zero? $\Rightarrow$ coplanarietat.

3 Productes entre vectors

3.1 Producte escalar

Si $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, el producte escalar és

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3.$$

També compleix

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \cos \alpha,$$

on α és l'angle entre els vectors.

Per tant,

$$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

3.2 Perpendicularitat

Dos vectors no nuls són perpendiculars si i només si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Atenció PAU

Que dues rectes tinguin vectors directors perpendiculars no garanteix que les rectes es tallin. A l'espai poden ser rectes que es creuen i, tot i així, tenir vectors directors perpendiculars. En aquest cas es parla de direccions perpendiculars, però no de rectes perpendiculars en el sentit geomètric estricte si no hi ha punt de tall.

3.3 Producte vectorial

El producte vectorial de $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ és

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}.$$

És un vector perpendicular a $\vec{u}$ i a $\vec{v}$.

Propietats importants:

- $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ si i només si $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són paral·lels.
- $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$ és l'àrea del paral·lelogram generat per $\vec{u}$ i $\vec{v}$.
- L'àrea del triangle format per dos vectors és

$$A_{triangle} = \frac{1}{2} \|\vec{u} \times \vec{v}\|.$$

3.4 Producte mixt

El producte mixt de tres vectors és

$$[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = (\vec{u} \times \vec{v}) \cdot \vec{w} = \det \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{pmatrix}.$$

Interpretació:

- $|[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}]|$ és el volum del paral·lelepípede generat pels tres vectors.
- Si $[\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}] = 0$, els tres vectors són coplanaris.

4 Equacions de la recta a l'espai

Una recta queda determinada per un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i un vector director $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ no nul.

4.1 Equació vectorial

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{v}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

En coordenades:

$$(x, y, z) = (x_0, y_0, z_0) + \lambda(v_1, v_2, v_3), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.2 Equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1, \\ y = y_0 + \lambda v_2, \\ z = z_0 + \lambda v_3, \end{cases} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

4.3 Equació contínua

Si $v_1, v_2, v_3 \neq 0$, podem escriure

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Atenció PAU

Si alguna component del vector director és zero, no es pot posar al denominador. Per exemple, si $\vec{v} = (2, 0, -1)$, la recta s'escriu millor com

$$\frac{x - x_0}{2} = \frac{z - z_0}{-1}, \quad y = y_0.$$

Aquest és un error molt típic.

4.4 Recta com a intersecció de dos plans

Una recta també pot venir donada per dues equacions implícites:

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0. \end{cases}$$

Això representa la intersecció de dos plans no paral·lels.

Per trobar un vector director de la recta, es pot fer el producte vectorial dels vectors normals dels plans:

$$\vec{v}_r = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2,$$

on

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Per trobar un punt de la recta, es resol el sistema donant un valor còmode a una variable.

5 Equacions del pla a l'espai

Un pla queda determinat per un punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ i dos vectors directores linealment independents $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ i $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

5.1 Equació vectorial

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5.2 Equacions paramètriques

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda u_1 + \mu v_1, \\ y = y_0 + \lambda u_2 + \mu v_2, \\ z = z_0 + \lambda u_3 + \mu v_3, \end{cases} \quad \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

5.3 Equació implícita o general

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0.$$

El vector normal del pla és

$$\vec{n} = (A, B, C).$$

5.4 Com trobar el pla que passa per un punt i té dos vectors directors

Si el pla passa per $P = (x_0, y_0, z_0)$ i té vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, un punt genèric $X = (x, y, z)$ pertany al pla si els vectors $\overrightarrow{PX}$, $\vec{u}$ i $\vec{v}$ són dependents:

$$\det \begin{pmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{pmatrix} = 0.$$

Equivalentment, podem calcular un vector normal:

$$\vec{n} = \vec{u} \times \vec{v},$$

i escriure

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{PX} = 0.$$

5.5 Pla que passa per tres punts

Donats tres punts A, B, C , primer comprovem que no estan alineats. Per fer-ho, calculem

$$\overrightarrow{AB}, \quad \overrightarrow{AC}.$$

Si aquests dos vectors són proporcionals, els punts estan alineats i no determinen un únic pla. Si no són proporcionals, el pla és el que passa per A i té com a vectors directors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.

Atenció PAU

Tres punts sempre són coplanaris, però només determinen un únic pla si no estan alineats. Aquesta distinció pot aparèixer en preguntes de raonament.

6 Pertinença: saber si un punt és en una recta o en un pla

6.1 Punt en una recta

Si la recta és paramètrica,

$$r : \begin{cases} x = x_0 + \lambda v_1, \\ y = y_0 + \lambda v_2, \\ z = z_0 + \lambda v_3, \end{cases}$$

un punt $P = (a, b, c)$ pertany a r si existeix un mateix valor de λ que satisfà les tres equacions:

$$\begin{cases} a = x_0 + \lambda v_1, \\ b = y_0 + \lambda v_2, \\ c = z_0 + \lambda v_3. \end{cases}$$

6.2 Punt en un pla

Si el pla és

$$\pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

el punt $P = (a, b, c)$ pertany al pla si

$$Aa + Bb + Cc + D = 0.$$

7 Posició relativa de dues rectes

Siguin

$$r : X = P + \lambda \vec{u}, \quad s : X = Q + \mu \vec{v}.$$

7.1 Mètode vectorial

Considerem els vectors directors $\vec{u}, \vec{v}$ i el vector que uneix un punt de cada recta:

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P.$$

Condicció	Posició	Com justificar-ho
$\vec{u}$ i $\vec{v}$ proporcionals, i $\overrightarrow{PQ}$ proporcional a $\vec{u}$	Coincidents	Mateixa direcció i un punt d'una pertany a l'altra.
$\vec{u}$ i $\vec{v}$ proporcionals, però $\overrightarrow{PQ}$ no proporcional a $\vec{u}$	Paral·leles no coincidents	Mateixa direcció però punts diferents fora de l'altra recta.
$\vec{u}$ i $\vec{v}$ no proporcionals i $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = 0$	Secants	Són coplanàries i no paral·leles; per tant, es tallen.
$\vec{u}$ i $\vec{v}$ no proporcionals i $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] \neq 0$	Es creuen	No són coplanàries; no es tallen.

Mètode d'examen

Per trobar el punt d'intersecció de dues rectes secants, iguala les paramètriques:

$$P + \lambda \vec{u} = Q + \mu \vec{v}.$$

Això dona un sistema de tres equacions amb dues incògnites λ i μ . Si és compatible, el punt de tall s'obté substituint el valor del paràmetre en una de les dues rectes.

7.2 Mètode amb rangs

Si les rectes venen donades com a intersecció de plans,

$$r : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \end{cases} \quad s : \begin{cases} A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0, \\ A_4x + B_4y + C_4z + D_4 = 0, \end{cases}$$

es poden considerar la matriu de coeficients M i l'ampliada M' . En PAU és més habitual passar a vectors directors, però la lectura amb rangs és:

$\text{rang}(M)$	$\text{rang}(M')$	Sistema	Posició
2	2	SCI amb 1 grau de llibertat	Rectes coincidents
2	3	SI	Rectes paral·leles
3	3	SCD	Rectes secants
3	4	SI	Rectes que es creuen

Atenció PAU

Un sistema incompatible entre dues rectes no vol dir automàticament que siguin paral·leles. A l'espai, també poden ser rectes que es creuen. Cal mirar si els vectors directors són proporcionals.

8 Posició relativa entre recta i pla

Siguin

$$r : X = P + \lambda \vec{v}, \quad \pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

amb vector normal del pla

$$\vec{n} = (A, B, C).$$

8.1 Mètode ràpid amb producte escalar

Cal mirar

$$\vec{v} \cdot \vec{n}.$$

Condició	Posició	Com acabar
$\vec{v} \cdot \vec{n} \neq 0$	Recta secant al pla	Substituir paramètriques al pla i trobar el punt de tall.
$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ i $P \in \pi$	Recta continguda en el pla	Tots els punts de la recta són al pla.
$\vec{v} \cdot \vec{n} = 0$ i $P \notin \pi$	Recta paral·lela al pla	No hi ha cap punt de tall.

8.2 Mètode substituïnt

Substituïm

$$x = x_0 + \lambda v_1, \quad y = y_0 + \lambda v_2, \quad z = z_0 + \lambda v_3$$

a l'equació del pla:

$$A(x_0 + \lambda v_1) + B(y_0 + \lambda v_2) + C(z_0 + \lambda v_3) + D = 0.$$

Aleshores:

- si surt un valor únic de λ , la recta és secant;
- si surt $0 = 0$, la recta està continguda en el pla;
- si surt una contradicció, per exemple $0 = 5$, la recta és paral·lela al pla.

Idea clau

Aquest mètode és molt segur a l'examen perquè no només classifica la posició, sinó que si hi ha intersecció també dona directament el punt de tall.

9 Posició relativa entre dos plans

Siguin

$$\pi_1 : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \quad \pi_2 : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0.$$

Els vectors normals són

$$\vec{n}_1 = (A_1, B_1, C_1), \quad \vec{n}_2 = (A_2, B_2, C_2).$$

Condicció	Posició	Intersecció
$\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ proporcionals, i les equacions són proporcionals incloent D	Plans coincidents	Tot el pla
$\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ proporcionals, però les equacions no són proporcionals incloent D	Plans paral·lels diferents	Cap punt
$\vec{n}_1$ i $\vec{n}_2$ no proporcionals	Plans secants	Una recta

Si els plans són secants, el vector director de la recta d'intersecció és

$$\vec{v} = \vec{n}_1 \times \vec{n}_2.$$

10 Posició relativa entre tres plans

Tres plans formen un sistema de tres equacions amb tres incògnites:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0, \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0. \end{cases}$$

La interpretació depèn del rang de la matriu de coeficients M i de la matriu ampliada M' .

$\text{rang}(M)$	$\text{rang}(M')$	Sistema	Interpretació geomètrica
3	3	SCD	Els tres plans es tallen en un punt.
2	2	SCI	Intersecció comuna amb una recta o plans coincidents parcialment.
1	1	SCI	
2	3	SI	Els tres plans són coincidents o equivalents.
1	2	SI	No hi ha intersecció comuna.
			Plans paral·lels incompatibles.

Atenció PAU

La taula de rangs diu si el sistema té solució, però no sempre descriu amb tot detall visual la posició dels tres plans. Si l'exercici demana interpretació geomètrica fina, cal complementar amb proporcionalitat de normals i comparació d'equacions.

11 Distàncies

11.1 Distància entre dos punts

$$d(P, Q) = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}.$$

11.2 Distància d'un punt a un pla

Si

$$P = (x_0, y_0, z_0), \quad \pi : Ax + By + Cz + D = 0,$$

aleshores

$$d(P, \pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Atenció PAU

Aquesta fórmula només és vàlida si el pla està en forma implícita. Si el pla està en paramètriques, primer cal trobar l'equació general o un vector normal.

11.3 Distància d'un punt a una recta

Si

$$r : X = Q + \lambda \vec{v},$$

aleshores

$$d(P, r) = \frac{\|\overrightarrow{QP} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}.$$

Interpretació: el numerador és l'àrea del paral·lelogram generat per $\overrightarrow{QP}$ i $\vec{v}$; en dividir per la base $\|\vec{v}\|$ queda l'altura, és a dir, la distància.

11.4 Distància entre dos plans

Si els plans no són paral·lels, es tallen i la distància és zero.

Si són paral·lels,

$$\pi_1 : Ax + By + Cz + D_1 = 0, \quad \pi_2 : Ax + By + Cz + D_2 = 0,$$

aleshores

$$d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|D_2 - D_1|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Atenció PAU

Aquesta fórmula només es pot aplicar quan els coeficients A, B, C estan exactament igualats. Si un pla és $2x + 2y + 2z + 4 = 0$ i l'altre és $x + y + z + 1 = 0$, primer cal dividir el primer per 2.

11.5 Distància entre recta i pla

- Si la recta talla el pla, la distància és 0.
- Si la recta està continguda en el pla, la distància és 0.
- Si la recta és paral·lela al pla, triem un punt P de la recta i fem

$$d(r, \pi) = d(P, \pi).$$

11.6 Distància entre dues rectes

Siguin

$$r : X = P + \lambda \vec{u}, \quad s : X = Q + \mu \vec{v}.$$

- Si són secants, la distància és 0.
- Si són coincidents, la distància és 0.

- Si són paral·leles, triem un punt P d'una recta i calculem la distància de P a l'altra recta:

$$d(r, s) = d(P, s).$$

- Si es creuen, aleshores

$$d(r, s) = \frac{|\overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v}|}{\|\vec{u} \times \vec{v}\|}.$$

Atenció PAU

La fórmula del producte mixt per a distància entre rectes només s'aplica quan les rectes es creuen. Si són paral·leles, $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{0}$ i la fórmula no té sentit.

12 Angles

12.1 Angle entre dues rectes

Si les rectes tenen vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$, l'angle entre les rectes és l'angle agut entre les seves direccions:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{\|\vec{u}\| \|\vec{v}\|}.$$

Nota important

S'utilitza valor absolut perquè normalment es demana l'angle menor entre rectes, entre 0° i 90° .

12.2 Angle entre dos plans

L'angle entre dos plans és l'angle entre els seus vectors normals:

$$\cos \alpha = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\| \|\vec{n}_2\|}.$$

12.3 Angle entre una recta i un pla

Si la recta té vector director $\vec{v}$ i el pla té vector normal $\vec{n}$, aleshores l'angle α entre la recta i el pla compleix

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{v}\| \|\vec{n}\|}.$$

Atenció PAU

No confonguis angle recta-pla amb angle entre el vector director de la recta i el vector normal del pla. Són angles complementaris. Per això apareix el sinus, no el cosinus.

13 Perpendicularitat

13.1 Rectes perpendiculars

Dues rectes amb vectors directors $\vec{u}$ i $\vec{v}$ tenen direccions perpendiculars si

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0.$$

Però perquè siguin rectes perpendiculars en sentit geomètric, a més han de ser secants.

13.2 Recta perpendicular a un pla

Una recta és perpendicular a un pla si el seu vector director és paral·lel al vector normal del pla:

$$\vec{v}_r \parallel \vec{n}_\pi.$$

13.3 Recta paral·lela a un pla

Una recta és paral·lela a un pla si el seu vector director és perpendicular al vector normal del pla:

$$\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi = 0.$$

Després cal mirar si la recta està continguda o és paral·lela estricta.

13.4 Plans perpendiculars

Dos plans són perpendiculars si els seus vectors normals són perpendiculars:

$$\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 = 0.$$

14 Àrees i volums

14.1 Àrea d'un triangle a l'espai

Si el triangle té vèrtexs A, B, C , llavors

$$A_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\|.$$

14.2 Volum d'un tetraedre

Si el tetraedre té vèrtexs A, B, C, D , llavors

$$V = \frac{1}{6} \left| [\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}] \right|.$$

Nota important

El producte mixt dona el volum del paral·lelepípede. El tetraedre ocupa una sisena part d'aquest volum.

15 Procediments típics de PAU

15.1 Trobar una recta

Mètode d'examen

Per escriure una recta necessites:

1. Un punt P de la recta.
2. Un vector director $\vec{v}$.

Després escrius

$$(x, y, z) = P + \lambda \vec{v}.$$

Situacions típiques:

- Recta que passa per dos punts A i B : vector director $\overrightarrow{AB}$.
- Recta paral·lela a una altra: mateix vector director.
- Recta perpendicular a un pla: vector director igual al vector normal del pla.
- Recta intersecció de dos plans: vector director $\vec{n}_1 \times \vec{n}_2$ i punt resolent el sistema.

15.2 Trobar un pla

Mètode d'examen

Per escriure un pla necessites una de les dues opcions:

1. Un punt i dos vectors directors independents.
2. Un punt i un vector normal.

Situacions típiques:

- Pla que passa per tres punts: vectors $\overrightarrow{AB}$ i $\overrightarrow{AC}$.
- Pla paral·lel a un altre: mateix vector normal.
- Pla perpendicular a una recta: vector normal igual al vector director de la recta.
- Pla que conté una recta i un punt exterior: un vector director és el de la recta i l'altre uneix un punt de la recta amb el punt exterior.
- Pla que conté dues rectes secants: vectors directors de les dues rectes i punt de tall.
- Pla que conté dues rectes paral·leles: vector director comú i vector que uneix un punt d'una recta amb un punt de l'altra.

16 Casos difícils i trapes habituals

16.1 Quan una recta ve amb denominadors zero

Una expressió com

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+3}{0} = \frac{z}{4}$$

no és una equació contínua ben escrita. S'ha d'interpretar com

$$\frac{x-1}{2} = \frac{z}{4}, \quad y = -3.$$

16.2 Rectes que es creuen

En el pla, dues rectes no paral·leles sempre es tallen. A l'espai, no. Poden ser rectes que es creuen.

Per detectar-ho:

- mira si els vectors directors són proporcionals;
- si no ho són, calcula el producte mixt amb el vector que uneix punts de les dues rectes;
- si el producte mixt no és zero, les rectes no són coplanàries i es creuen.

16.3 Angle entre recta i pla

Error típic: aplicar directament el cosinus entre $\vec{v}_r$ i $\vec{n}_\pi$ i donar aquest angle. Aquest angle és el complementari de l'angle recta-pla.

La fórmula segura és

$$\sin \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{n}_\pi|}{\|\vec{v}_r\| \|\vec{n}_\pi\|}.$$

16.4 Distància entre plans

Només té sentit calcular una distància positiva entre dos plans si són paral·lels. Si es tallen, la distància és zero.

16.5 Distància entre rectes

Abans d'aplicar cap fórmula, classifica la posició relativa:

- coincidents o secants: distància zero;
- paral·leles: punt a recta;
- es creuen: fórmula del producte mixt.

16.6 Pla a partir de tres punts

Si els tres punts estan alineats, no hi ha un únic pla. N'hi ha infinits. Per tant, abans de fer determinants mecànicament, comprova si els vectors formats són proporcionals.

16.7 Paral·lelisme i coincidència

Quan dues rectes o dos plans són paral·lels, encara falta decidir si són diferents o coincidents. Cal comprovar un punt o comparar termes independents.

16.8 Paràmetres en geometria

Quan apareix un paràmetre a , m , k , etc., normalment hi ha un valor crític que fa canviar la posició relativa:

- determinant zero;
- vectors que passen a ser proporcionals;
- producte escalar que passa a ser zero;
- producte mixt que passa a ser zero.

Mètode d'examen

Davant un exercici amb paràmetre:

1. ESCRIU la condició geomètrica en forma algebraica.
2. Resol l'equació que dona els valors crítics del paràmetre.
3. Estudia separatament el cas general i els valors crítics.
4. Redacta la conclusió geomètrica per a cada cas.

17 Redaccions model per a l'examen

17.1 Dues rectes

“Els vectors directors són $\vec{u} = \dots$ i $\vec{v} = \dots$. Com que no són proporcionals, les rectes no són paral·leles. Considerem $\overrightarrow{PQ} = \dots$. El producte mixt és $[\vec{u}, \vec{v}, \overrightarrow{PQ}] = \dots$. Com que és zero/no és zero, les rectes són coplanàries/no coplanàries. Per tant, són secants/es creuen.”

17.2 Recta i pla

“El vector director de la recta és $\vec{v} = \dots$ i el vector normal del pla és $\vec{n} = \dots$. Calculem $\vec{v} \cdot \vec{n} = \dots$. Si és diferent de zero, la recta talla el pla. Si és zero, agafem un punt de la recta i comprovem si pertany al pla. Així decidim si la recta està continguda o és paral·lela al pla.”

17.3 Dos plans

“Els vectors normals són $\vec{n}_1 = \dots$ i $\vec{n}_2 = \dots$. Com que són/no són proporcionals, els plans són paral·lels/secants. En el cas paral·lel, comparem també els termes independents per decidir si són coincidents o paral·lels diferents.”

18 Taula final de fórmules imprescindibles

Concepte	Fórmula
Vector entre punts	$\overrightarrow{PQ} = Q - P$
Mòdul	$\ \vec{u}\ = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$
Producte escalar	$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
Angle entre vectors	$\cos \alpha = \frac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$
Recta vectorial	$X = P + \lambda \vec{v}$
Pla vectorial	$X = P + \lambda \vec{u} + \mu \vec{v}$
Pla implícit	$Ax + By + Cz + D = 0$, amb $\vec{n} = (A, B, C)$
Punt-pla	$d(P, \pi) = \frac{ Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D }{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$
Punt-recta	$d(P, r) = \frac{\ \overrightarrow{QP} \times \vec{v}\ }{\ \vec{v}\ }$
Rectes que es creuen	$d(r, s) = \frac{ \overrightarrow{PQ}, \vec{u}, \vec{v} }{\ \vec{u} \times \vec{v}\ }$
Angle recta-recta	$\cos \alpha = \frac{ \vec{u} \cdot \vec{v} }{\ \vec{u}\ \ \vec{v}\ }$
Angle pla-pla	$\cos \alpha = \frac{ \vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2 }{\ \vec{n}_1\ \ \vec{n}_2\ }$
Angle recta-pla	$\sin \alpha = \frac{ \vec{v} \cdot \vec{n} }{\ \vec{v}\ \ \vec{n}\ }$
Àrea triangle	$A = \frac{1}{2} \ \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\ $
Volum tetraedre	$V = \frac{1}{6} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD} $