

Resum: Concepte de derivada

1. Motivació: taxa de variació

Per mesurar com creix una funció $f(x)$, considerem la pendent entre dos punts $P_1 = (x_1, f(x_1))$ i $P_2 = (x_2, f(x_2))$:

$$m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

Aquest valor representa la **taxa de variació mitjana** de $f(x)$ en l'interval $[x_1, x_2]$.

2. Concepte de derivada

Si acostem x_2 a x_1 , obtenim la taxa de variació instantània, és a dir, la **derivada**:

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

També pot expressar-se com:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

La derivada representa la pendent de la recta tangent a la corba en el punt x_0 .

3. Funció derivada

La funció derivada $f'(x)$ associa a cada valor de x el valor del creixement de f en aquest punt. Exemple:

$$f(x) = x^2 - 2x \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$$

4. Derivabilitat

Perquè una funció sigui derivable en un punt x_0 , ha de complir:

- És contínua en x_0
- Existeixen i coincideixen els límits laterals de la definició de derivada

No totes les funcions contínues són derivables (ex: funcions definides a trossos amb trencaments angulosos).

5. Derivades de funcions elementals

- Constant: $f(x) = c \Rightarrow f'(x) = 0$
- Identitat: $f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
- Potència: $f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = nx^{n-1}$
- Exponencial: $f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$
- Logaritme neperià: $f(x) = \ln(x) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{x}$
- Trigonomètriques:
 - $\sin(x) \Rightarrow \cos(x)$
 - $\cos(x) \Rightarrow -\sin(x)$

6. Regles de derivació

- Suma: $(f + g)' = f' + g'$
- Constant per funció: $(kf)' = kf'$
- Producte: $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
- Quocient: $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$
- Regla de la cadena: Si $f(x) = v(u(x))$, aleshores:

$$f'(x) = v'(u(x)) \cdot u'(x)$$

7. Cas especial: $f(x) = g(x)^{h(x)}$

$$f'(x) = g(x)^{h(x)} \left(\ln(g(x)) \cdot h'(x) + \frac{h(x) \cdot g'(x)}{g(x)} \right)$$

8. Derivades successives

Si $f(x) = \sin(x)$:

$$f'(x) = \cos(x), \quad f''(x) = -\sin(x), \quad f^{(3)}(x) = -\cos(x), \quad f^{(4)}(x) = \sin(x)$$

Annex: Taula de derivades essencials

Funció $f(x)$	Derivada $f'(x)$
c (constant)	0
x	1
x^n	$n \cdot x^{n-1}$
e^x	e^x
a^x	$\ln(a) \cdot a^x$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
$\log_a(x)$	$\frac{1}{x \cdot \ln(a)}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
$\tan(x)$	$\frac{1}{\cos^2(x)}$
$\cot(x)$	$-\frac{1}{\sin^2(x)}$
$\arcsin(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos(x)$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan(x)$	$\frac{1}{1+x^2}$

Regles de derivació:

- $(f + g)' = f' + g'$
- $(k \cdot f)' = k \cdot f'$
- $(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$
- $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$
- **Regla de la cadena:** $f(x) = g(h(x)) \Rightarrow f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$

1 Aplicacions de la derivada

1. Recta tangent i normal

- La recta **tangent** a $f(x)$ en x_0 té pendent $f'(x_0)$ i passa pel punt $(x_0, f(x_0))$.
- La recta **normal** és perpendicular a la tangent i té pendent $-1/f'(x_0)$.
- Si volem una tangent paral·lela a una recta donada, igualem $f'(x)$ al pendent d'aquesta recta.

2. Signe d'una funció

El signe d'una funció pot canviar:

- Als punts on $f(x) = 0$ (arrels).
- Als punts on $f(x)$ és discontinua (discontinuitats).

Es divideix l'eix real en intervals, s'avalua el signe de $f(x)$ a cadascun.

3. Creixement i extrems relatius

- $f'(x) > 0 \Rightarrow f$ creixent
- $f'(x) < 0 \Rightarrow f$ decreixent
- $f'(x) = 0$ pot indicar un màxim, un mínim o punt d'inflexió horitzontal

Els extrems es detecten analitzant el signe de f' o amb f'' :

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{i} \quad \begin{cases} f''(x_0) > 0 & \Rightarrow \text{mínim} \\ f''(x_0) < 0 & \Rightarrow \text{màxim} \end{cases}$$

4. Curvatura i punts d'inflexió

- $f''(x) > 0$: gràfica **còncava**
- $f''(x) < 0$: gràfica **convexa**
- $f''(x) = 0$ i canvi de signe: **punt d'inflexió**

5. Regla de l'Hôpital

Per resoldre indeterminacions com $\frac{0}{0}$ o $\frac{\infty}{\infty}$:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

si f i g són derivables i el límit del quocient de derivades existeix.

6. Asímtotes

Asímtota vertical: límit infinit en un punt $x = a$.

Asímtota horitzontal: límit finit quan $x \rightarrow \pm\infty$.

Asímtota obliqua: si $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0$, la recta $y = mx + n$ és asímtota obliqua si també:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - (mx + n)] = 0$$

7. Estudi complet d'una funció

Passos:

1. Domini
2. Tall amb els eixos
3. Simetria
4. Creixement i extrems (f')
5. Curvatura i punts d'inflexió (f'')
6. Asímtotes
7. Gràfica i recorregut
8. Signe i continuïtat

8. Problemes d'optimització

Procés:

1. Escrivim la funció a optimitzar
2. Reduïm a una sola variable
3. Derivem i trobem els punts crítics ($f' = 0$)
4. Comprovem si és màxim o mínim amb f''

Exemple: Amb 120m de tanca fer un recinte rectangular de màxima àrea.

Si $2x + 2y = 120 \Rightarrow y = 60 - x$, aleshores:

$$A(x) = x(60 - x) = -x^2 + 60x \Rightarrow A'(x) = -2x + 60 = 0 \Rightarrow x = 30$$