

1 Què entra realment d'àlgebra a les PAU?

Matemàtiques de 2n de Batxillerat

El bloc d'àlgebra que cal dominar és:

- Operacions amb matrius de fins a tres files i tres columnes: suma, producte i inversió.
- Determinant d'una matriu quadrada.
- Rang d'una matriu.
- Discussió i resolució de sistemes lineals de fins a tres equacions i tres incògnites.
- Sistemes sense paràmetres o amb un paràmetre.
- Problemes modelitzables mitjançant sistemes d'equacions.

2 Matrius: definició i tipus

Una **matriu** és una taula rectangular de nombres:

$$A = (a_{ij}) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Té m files i n columnes. Diem que $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$.

Error habitual

No es pot sumar ni restar matrius de mides diferents. El producte AB només existeix si el nombre de columnes de A coincideix amb el nombre de files de B .

3 Operacions amb matrius

3.1 Igualtat de matrius

Dues matrius són iguals si tenen la mateixa dimensió i coincideixen element a element:

$$A = B \iff a_{ij} = b_{ij} \quad \text{per a tots } i, j.$$

Això és molt útil en equacions matricials: s'igualen les posicions corresponents.

3.2 Suma i resta

Si $A, B \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \quad A - B = (a_{ij} - b_{ij}).$$

Propietats:

- $A + B = B + A$.
- $(A + B) + C = A + (B + C)$.
- $A + 0 = A$.
- $A + (-A) = 0$.

3.3 Producte per un escalar

Si $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda A = (\lambda a_{ij}).$$

Propietats:

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B, \quad (\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A, \quad \lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A.$$

3.4 Producte de matrius

Si $A \in \mathcal{M}_{m \times n}$ i $B \in \mathcal{M}_{n \times p}$, aleshores $AB \in \mathcal{M}_{m \times p}$ i:

$$(AB)_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Lectura pràctica: fila de A per columna de B .

Exemple:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot 5 + 2 \cdot 7 & 1 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \\ 3 \cdot 5 + 4 \cdot 7 & 3 \cdot 6 + 4 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 19 & 22 \\ 43 & 50 \end{pmatrix}.$$

Atenció: el producte no és commutatiu

En general,

$$AB \neq BA.$$

Fins i tot pot passar que AB existeixi i BA no existeixi.

Propietats importants:

- Associativa: $(AB)C = A(BC)$.
- Distributiva: $A(B + C) = AB + AC$.
- Element neutre: $AI = IA = A$.
- Transposada del producte: $(AB)^t = B^t A^t$.

4 Equacions matricials

Una equació matricial és una equació on la incògnita és una matriu.

4.1 Equacions sense inversa

Exemple:

$$2X + A = B.$$

Aïllem com en una equació normal:

$$2X = B - A, \quad X = \frac{1}{2}(B - A).$$

4.2 Equacions amb productes

Si:

$$AX = B,$$

i A és quadrada i invertible, multipliquem per l'esquerra per A^{-1} :

$$A^{-1}AX = A^{-1}B, \quad X = A^{-1}B.$$

Si:

$$XA = B,$$

multipliquem per la dreta per A^{-1} :

$$XAA^{-1} = BA^{-1}, \quad X = BA^{-1}.$$

Error greu de PAU

No és el mateix $AX = B$ que $XA = B$. El costat per on multipliques per la inversa importa. Les matrius no commuten en general.

5 Determinants

Els determinants només estan definits per a matrius quadrades.

5.1 Determinant d'ordre 1

$$|a| = a.$$

5.2 Determinant d'ordre 2

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc.$$

5.3 Determinant d'ordre 3: regla de Sarrus

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix},$$

aleshores

$$|A| = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Equivalentment:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = aei + bfg + cdh - ceg - bdi - afh.$$

Quan hi ha paràmetres

Si el determinant depèn d'un paràmetre k , el primer pas habitual és calcular $|A|$ i resoldre:

$$|A| = 0.$$

Els valors que anul·len el determinant són els **casos especials**. Per als altres valors, si el sistema és quadrat, normalment tindrem solució única.

6 Propietats dels determinants

6.1 Propietats bàsiques

1. Si una fila o columna és tota zero, el determinant val 0.
2. Si dues files o dues columnes són iguals, el determinant val 0.
3. Si dues files o dues columnes són proporcionals, el determinant val 0.
4. Si una fila o columna és combinació lineal de les altres, el determinant val 0.
5. Si intercanviem dues files o dues columnes, el determinant canvia de signe.
6. $|A^t| = |A|$.
7. Si multipliquem una fila per λ , el determinant queda multiplicat per λ .
8. Si A és triangular, $|A|$ és el producte dels elements de la diagonal.
9. $|AB| = |A| |B|$.
10. Si A és $n \times n$, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.
11. Si A és invertible, $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Propietat molt usada per simplificar

Si substituïm una fila per ella mateixa més una combinació lineal d'altres files, el determinant no canvia:

$$F_i \leftarrow F_i + \lambda F_j.$$

Això permet fer zeros i calcular determinants més ràpidament.

7 Menors, adjunts i desenvolupament per una fila o columna

7.1 Menor complementari

Donada una matriu quadrada $A = (a_{ij})$, el **menor complementari** de a_{ij} és el determinant que queda eliminant la fila i i la columna j . El denotem per M_{ij} .

7.2 Adjunt d'un element

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}.$$

El signe segueix el patró:

$$\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}.$$

7.3 Desenvolupament de Laplace

Podem calcular un determinant desenvolupant per qualsevol fila o columna.

Per la fila i :

$$|A| = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}.$$

Per la columna j :

$$|A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}.$$

Consell d'examen

Desenvolupa sempre per la fila o columna amb més zeros. Redueixes molt el risc d'errors.

8 Matriu inversa

8.1 Definició

Una matriu quadrada A té inversa si existeix una matriu A^{-1} tal que:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I.$$

8.2 Condició d'existència

$$A \text{ és invertible} \iff |A| \neq 0.$$

Si $|A| = 0$, la matriu és singular i no té inversa.

8.3 Inversa d'una matriu 2×2

Si

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad |A| = ad - bc \neq 0,$$

aleshores

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

8.4 Inversa d'una matriu 3×3

Si $|A| \neq 0$:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A)^t,$$

on $\text{Adj}(A)$ és la matriu d'adjunts.

Confusió habitual

Alguns llibres anomenen “adjunta” la matriu d’adjunts i altres anomenen “adjunta” la transposada de la matriu d’adjunts. Per evitar errors, escriu sempre el procés:

1. calcular menors;
2. posar signes;
3. formar la matriu d’adjunts;
4. transposar;
5. dividir per $|A|$.

9 Rang d’una matriu

9.1 Idea intuïtiva

El rang d’una matriu és el nombre de files o columnes realment independents. Mesura quanta informació no redundant conté la matriu.

9.2 Definició per determinants

El rang de A , escrit $\text{rang}(A)$, és l’ordre del menor no nul de mida més gran que podem trobar dins la matriu.

9.3 Com calcular el rang

1. Mira si hi ha algun element no nul. Si sí, $\text{rang}(A) \geq 1$.
2. Mira si hi ha algun determinant 2×2 no nul. Si sí, $\text{rang}(A) \geq 2$.
3. Mira si hi ha algun determinant 3×3 no nul. Si sí, $\text{rang}(A) = 3$.

Per matrius 3×3 :

$$|A| \neq 0 \implies \text{rang}(A) = 3.$$

Si $|A| = 0$, llavors $\text{rang}(A) < 3$ i cal mirar menors 2×2 .

Cas típic amb paràmetre

Si $|A(k)| = 0$ per a un valor concret de k , no pots concloure automàticament que el sistema sigui incompatible o indeterminat. Només saps que $\text{rang}(A) < n$. Després cal comparar amb el rang de la matriu ampliada.

10 Sistemes d’equacions lineals

Un sistema lineal de m equacions i n incògnites té la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Es pot escriure matricialment:

$$AX = B,$$

on:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

La matriu ampliada és:

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

11 Classificació dels sistemes

- **Sistema compatible determinat (SCD):** té una única solució.
- **Sistema compatible indeterminat (SCI):** té infinites solucions.
- **Sistema incompatible (SI):** no té solució.

12 Teorema de Rouché–Frobenius

Sigui A la matriu de coeficients, $(A|B)$ la matriu ampliada i n el nombre d'incògnites.

$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A B)$	$\implies$	SI
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A B) = n$	$\implies$	SCD
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A B) < n$	$\implies$	SCI

Si és SCI, el nombre de paràmetres lliures és:

$$n - \text{rang}(A).$$

La taula més important de tot el tema

Condicció	Tipus de sistema	Nombre de solucions
$\text{rang}(A) \neq \text{rang}(A B)$	SI	0
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A B) = n$	SCD	1
$\text{rang}(A) = \text{rang}(A B) < n$	SCI	∞

13 Mètodes de resolució de sistemes

13.1 Mètode de Gauss

Consisteix a transformar el sistema en un sistema equivalent escalonat.

Operacions permeses:

- Intercanviar dues equacions.
- Multiplicar una equació per un nombre no nul.
- Substituir una equació per ella mateixa més un múltiple d'una altra.

Aquestes operacions no canvien el conjunt de solucions.

13.2 Què pot aparèixer en fer Gauss?

- Una fila tipus $0 = 0$: equació redundant.
- Una fila tipus $0 = c$, amb $c \neq 0$: contradicció. El sistema és incompatible.
- Una variable lliure: sistema compatible indeterminat.

13.3 Regla de Cramer

Per a un sistema quadrat $AX = B$ amb n equacions i n incògnites, si $|A| \neq 0$, la solució única és:

$$x_i = \frac{|A_i|}{|A|},$$

on A_i és la matriu que s'obté substituint la columna i de A per la columna dels termes independents B .

Per a 3×3 :

$$x = \frac{|A_x|}{|A|}, \quad y = \frac{|A_y|}{|A|}, \quad z = \frac{|A_z|}{|A|}.$$

Quan NO pots usar Cramer

Cramer només serveix directament quan el sistema és quadrat i $|A| \neq 0$. Si $|A| = 0$, no divideixis mai per zero. Cal fer discussió de rangs o Gauss.

13.4 Mètode de la inversa

Si $AX = B$ i A és invertible:

$$X = A^{-1}B.$$

Consell pràctic

A PAU, per a sistemes 3×3 , Gauss sol ser més segur que calcular una inversa sencera. Cramer és molt net si només et demanen una solució concreta i el determinant no és complicat.

14 Sistemes amb paràmetre

14.1 Procediment general

Per discutir un sistema 3×3 amb un paràmetre:

1. Escriu la matriu de coeficients A i l'ampliada $(A|B)$.
2. Calcula $|A|$.
3. Resol $|A| = 0$.

4. Per als valors que **no** anullen el determinant:

$$|A| \neq 0 \implies \text{rang}(A) = 3 \implies \text{SCD.}$$

5. Per als valors que **sí** l'anullen, substitueix el paràmetre i compara:

$$\text{rang}(A) \quad \text{i} \quad \text{rang}(A|B).$$

6. Si cal, resol els casos especials amb Gauss.

14.2 Model de redacció PAU

Calculem el determinant de la matriu de coeficients. Com que $|A| = \dots$, tenim que $|A| = 0$ quan $k = \dots$. Per tant, si $k \neq \dots$, el rang de A és 3 i coincideix amb el nombre d'incògnites; el sistema és compatible determinat. Per al cas $k = \dots$, substituïm i estudiem els rangs de A i $(A|B)$. Com que $\dots$, el sistema és $\dots$.

No et deixis el cas especial

Molts errors d'examen passen per dir: "com que el determinant és zero, no hi ha solució". Això és fals. Pot haver-hi infinites solucions o cap solució. Cal comparar rangs.

15 Sistemes homogenis

Un sistema és homogeni si tots els termes independents són zero:

$$AX = 0.$$

Sempre té almenys la solució trivial:

$$X = 0.$$

Si A és quadrada:

- Si $|A| \neq 0$, només té la solució trivial.
- Si $|A| = 0$, té infinites solucions.

Idea clau

Un sistema homogeni mai no pot ser incompatible, perquè la solució zero sempre compleix totes les equacions.

16 Problemes modelitzables amb sistemes

16.1 Passos de modelització

1. Defineix les incògnites amb unitats o significat:

$$x = \text{quantitat de producte A}, \quad y = \text{quantitat de producte B}, \quad z = \text{quantitat de producte C}.$$

2. Tradueix cada frase a una equació.

3. Escriu el sistema ordenat.
4. Resol.
5. Interpreta la solució en el context.
6. Comprova si la solució té sentit: no pot haver-hi quantitats negatives si el context no ho permet.

PAU valora la interpretació

En problemes contextualitzats, no deixis la resposta com $(x, y, z) = (2, 5, 7)$. Escriu què signifiquen aquests nombres.

17 Errors típics i com evitar-los

Error	Com evitar-lo
Dividir per un determinant que pot ser zero	Abans de dividir, separa el cas $ A = 0$.
Dir que $ A = 0$ implica incompatible	No. Implica que no hi ha solució única per Cramer. Cal mirar rangs.
Oblidar la matriu ampliada	En sistemes, no n'hi ha prou amb A . La compatibilitat depèn de comparar A i $(A B)$.
Fer $AB = BA$	Les matrius no commuten. Mantingues l'ordre original.
Calcular malament Sarrus	Escriu clarament les tres diagonals positives i les tres negatives.
No posar paràmetre en un SCI	Si hi ha infinites solucions, cal expressar-les totes, normalment amb $\lambda \in \mathbb{R}$.
No interpretar la solució d'un problema	Escriu una frase final amb el significat de les incògnites.
Confondre rang amb determinant	El determinant només existeix per a matrius quadrades. El rang existeix per a qualsevol matriu.

18 Casos difícils que cal tenir presents

18.1 Cas 1: determinant nul però sistema compatible indeterminat

Pot passar que $|A| = 0$ i que una equació sigui combinació lineal de les altres. En aquest cas el sistema pot tenir infinites solucions.

Exemple conceptual:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 2, \\ x - y = 0. \end{cases}$$

La segona equació no aporta informació nova. El sistema pot ser compatible indeterminat si queden menys equacions independents que incògnites.

18.2 Cas 2: determinant nul i sistema incompatible

Exemple conceptual:

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ 2x + 2y + 2z = 3. \end{cases}$$

La part esquerra de la segona equació és el doble de la primera, però el terme independent no ho és. Això genera contradicció.

18.3 Cas 3: paràmetre al terme independent

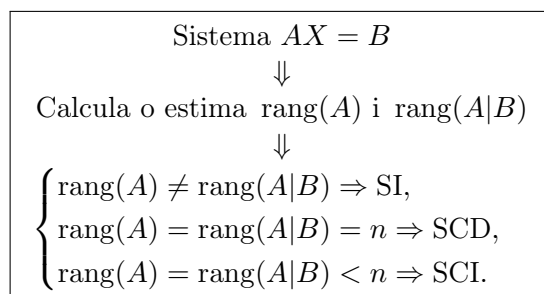
Si el paràmetre apareix a la columna independent, el determinant de A pot no detectar tots els canvis de compatibilitat. Cal mirar sempre la matriu ampliada.

18.4 Cas 4: sistema amb infinites solucions i interpretació geomètrica

En tres incògnites:

- SCD: tres plans es tallen en un punt.
- SCI amb un paràmetre: intersecció en una recta.
- SCI amb dos paràmetres: els plans coincideixen o queda un sol pla independent.
- SI: no hi ha punt comú d'intersecció.

19 Esquema final de decisió



Quan resolguis un exercici d'àlgebra, intenta que aparegui sempre:

1. Matriu de coeficients i, si toca, matriu ampliada.
2. Determinant de coeficients, si el sistema és quadrat.
3. Valors especials del paràmetre.
4. Discussió separada per casos.
5. Resolució del cas demanat.
6. Si hi ha infinites solucions, expressió paramètrica completa.
7. Frase final: SCD, SCI o SI, i nombre de solucions.

Redacció curta però completa

Una resposta bona no és només calcular. Ha de dir què significa el càlcul. Per exemple: “Com que $\text{rang}(A) = \text{rang}(A|B) = 2 < 3$, el sistema és compatible indeterminat i té un grau de llibertat.”